時空と偶然

第1回

飛田武幸
◎名古屋大学・名城大学名誉教授

確率論におけるノイズ

確率トハるべーぐ測度デアル

この言葉ほど確率の数学的本質を衝いたものはない．これが文献[1]（著者：伊藤清）の巻頭を飾った言葉であって，どれほど多くの人々の琴線にふれたか計り知れない．少し先だって文献[2]が刊行されていて，数学者はこの新しい確率論の動向に眼を向けていた．

図1　伊藤清教授とA. Kolmogoroff教授

とかくギャンブルとかサイコロ投げが確率の始まりであるかのような誤解を受けるが，これは横においておこう．偶然現象（これも定義しないといけないが）を数学として扱うには，まず確率空間という測度空間を構成しなければならない．そこから議論が始まる．

続いて，その空間に基づく理論が展開されて，与えられた偶然現象の解明が行なわれる．もちろん，測度論で終わるのではない．確率論の固有の独立という概念が基本的な役割を演ずるし，極限定理など固有の課題もあり，豊富な内容が続く．

ここで，既存の内容にも，基礎が与えられて，その装いを調えたのである．そして新しい確率論の研究も軌道に乗り，その内容を豊かにしながら，急速に発展して新興数学の一分野となったのである．

一方，確率論として扱われるべき課題や研究方法についての素朴な起源は，これより大分前に遡る．古くから温められてきた確率論についての考え方には現在に活きるものが多く，それをセオリーの歴史として認識することはきわめて重要なことである．ここで確率論史をいくらか振りかえってみよう．

◎──確率論の課題

誰かに確率空間を与えられて，確率計算の演習問題を解くのが確率論の主目的ではない．数学としての議論の場をはじめに準備するのは我々自身の仕事である．

そのように考えて，J. Bernoulli（1667-1705）の遺稿 *Ars Conjectandi* を見直そう．これは彼が没して後，後継者により1713年に刊行された．そこに初めて stochastice（英訳は stochastic）という言葉が登場する．

これは *Ars Conjectandi* 第4部，Chapt. 2 の B. Sung（ハーバード大学）による英訳のごく一部の抜粋である：

> To conjecture about something is to measure its probability; and therefore, the art of conjecturing or the *stochastic* art is defined by us as the art of measuring as exactly as possible the probabilities of things with this end in mind: that in our decisions or actions we may be able always to choose or to follow what has been perceived as being superior, more advantageous, safer or better considered; in this alone lies all the wisdom of the philosopher and all the discretion of the stateman.

ところで，確率・統計の歴史を，どの時代から始めるかは趣旨による．我々はここで述べたJ. Bernoulliの所論から始めたい．そのため上記のような引用をした．これが現代確率論の系譜に大きな影響を与えたのである．

Bernoulliと並んで考えたいのはT. Bayes（1702-1761）の業績である．彼の仕事は統計に偏るが，これまで多くの人々がとりあげているし，また一応の評価もなされていた．しかし，大きく取り上げられるようになったのは最近である．

現在の確率論は目覚ましい発展をとげてきているが，上記のような思想が絶えず底流にあったと思う．具体

的に Stochasticity という言葉も生まれた．経過をふまえ将来の夢を語るために，次節で二例を歴史として眺めよう．

◎──歴史は語る

Bernoulli 以後，18 世紀から，確率論とそれをめぐるいくつかの数学に関する話題の発展を見よう．

何といっても最初は C. F. Gauss(1777-1855)をあげなければならない．彼については，すでに語り尽くされているが，それでも，確率論についての彼の理論が，天文観測・地形の測量データの処理から出てきたという事実を，あらためて認識したい．実際 *Ars Conjectandi* の精神の見事な具体化がその仕事に見られる．Göttingen の天文台に残されている彼の膨大な計算記録からなる遺稿，そこに真の値を求めようとして観測を繰り返した跡を見ることができる．誤差の認識と処理のためであろうか．重要なことは，そこから誤差論が生まれ，ガウス分布の特徴づけが理論的に与えられていることである．

もう一人をあげよう．A. Einstein(1879-1955)である．ブラウン運動を数学の対象にし，実際に数式で表現したのはこの人である．偶然性は水中の微粒子と水の分子とが激しく衝突する現象から起こるとし，微粒子の時間的な推移は独立増分であるとした．粒子の密度分布を量的に数式 $u(x,t)$ で表し，それがみたす拡散方程式を導いた：

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{2}D\frac{\partial^2}{\partial x^2}u.$$

D は正定数である．この方程式の素解はガウス核であり，これはマルコフ過程としての推移確率を導く．

ちなみに，2005 年にはアメリカの電気電子学会 IEEE が，ノイズ誕生 100 周年の行事として，この論文の紹介と解説をした記念誌を刊行している．

ここで重要な注意が二つある．一つは，具体的な物から数学(情報論も含めて)の内容を創出したこと．第二には，デジタルからアナログへの移行である．後者についていえば，微粒子や水の分子などは，微細なものとはいえ離散的なものであるが，それを理想化して連続量として扱い，重要な発見をしている．このような移行は単純ではなく，後に見るように，特に確率論では十分注意が必要な事柄である．

図 2　Feller 教授夫妻の写真

故智に習うため，二つの古い例をあげたが，実質上は，確率空間を構成して(与えられたのではなく)理論を創成するという立場の説明である．引用の有無は別にして，Bernoulli の思想が生きている．独立の概念が大きく作用していることにも注意したい．

この思想を補足し，発展させた一人に W. Feller (1906-1971)がいる．著書[3]の序文で，「確率論を純粋数学の一分野として取扱い，解析的な方法で書こうというのが著者の最初の意図であった」と述べている．確率空間(標本空間)上の解析こそ，その手段である．

私がプリンストン大学で 1 年間講義したのは Feller に招待されたからであり，懇談の機会にも恵まれた．当時，彼は郊外の *Random* Road に居を構えていた．あえてこの名前の場所を選んだのでしょうと言ったら，いや，それは「偶然だ！」ということであった．

本稿では，以上のような事実をふまえ，4 回にわたって，ほぼ半世紀の過去にわたる確率論の発展を概観し，あわせて，今後の「夢」も語ることにしたい．

繰り返し強調するが，活躍の場である確率空間が天から与えられるのを待つのではなく，対象から確率空間を構成し，それから結論を得，予測することも目標である．これを実践する最近の話題も多いことを強調したい．例として文献[4]を挙げよう．

◎── ノイズ

目標を達成するためには，場を提供しなければならない．その場は確率空間である：すなわち測度空間(Ω, B, P)で$P(\Omega)=1$をみたす．これは後の解析のために，抽象ルベーグ空間と仮定する．すなわち，事象のなす完全加法族Bが加算個の要素から生成される場合である．

ランダムな複雑系とは，このような確率空間の上に定義された確率変数の系$X=\{X_a\,;\,a\in A\}$である．Aは順序集合で，整数$\mathbb{Z}$や実数$\mathbb{R}$をとることが多い．それらの部分領域をとることもある．このような系は偶然現象の数学的モデルと考えられる．その系の同定をしたり予測をしたりするための解析が課題となる．すなわち，多くのX_aの関数の微積分である．

その目的達成のための方法について提案をしよう．Xと同じ情報を持つ独立確率変数系$Y=\{Y_a\,;\,a\in A\}$，すなわち事象の完全加法族について$\mathrm{B}(X)=\mathrm{B}(Y)$が成り立つものを選ぶのが帰納化(Reduction)の段階である．次に，任意のaについて

$$X_a=\varphi(Y_b, b\in A\,;\,a)$$

が成り立つようにしたい．これが関数表示(Synthesis)の段階である．次に，各Y_aを変数としてφの解析(Analysis)の段階に至る：

Reduction → *Synthesis* → *Analysis*.

これに応用が従う．フィードバックも期待できる．

Reductionにより独立確率変数系$\{Y_a\,;\,a\in A\}$が得られたとしよう．これは我々が問題にする関数の変数系をなす．よって，さらに好ましい性質を持つことを要求しよう．各Y_aは同分布とする：i.i.d.(独立同分布)をなす．また，Reductionの要請から各Y_aは素(atomic)とする．すなわち，情報を増やすことなく，自明でない二つの独立確率変数の和として表すことはできない．また次節で説明するが，aが連続パラメータのときは，Y_aは通常の確率変数ではなくて，超(ideal)確率変数になるのが常である．このような理想的な系は*idealized elemental random variables*の系というべきであろう．我々は，これを簡単にノイズと呼ぶ．

ノイズには時間または空間を表すパラメータがつく．これには，[5]が参考になる．我々は「物質」のかわりに「ノイズ」を扱う．時空の現象の双対性は後述するがきわめて興味深い．

パラメータの集合は整数$\mathbb{Z}$または実数$\mathbb{R}$，あるいはそれらの部分区間である．パラメータ集合が$\mathbb{Z}$の場合離散型ノイズ，$\mathbb{R}$の場合連続型ノイズという．

離散型ノイズの場合，それは独立確率変数列でも，i.i.d.の場合になる．これを$\{Y_n, n\in\mathbb{Z}\}$と書く．その確率分布はY_nに共通な(1次元)分布mの可算個の直積となり，関数$f(Y_n, n\in\mathbb{Z})$の解析に困難はない．また，確率論固有の独立確率変数の和，たとえば$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n Y_n$の扱いは極限定理の問題として古くからよく知られている．

ここで一つの注意がある．ノイズ$\{Y_n, n\geq 0\}$の場合

$$(*)\quad Y_n \longleftrightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n} Y_k$$

とする同等関係がある．すなわち，一方から他方へ単純な加減の演算で移る．次節では，この同等性を連続パラメータの場合に拡張する．

◎── 連続型ノイズの構成

本題のための我々の考え方は次のようである．

(1) 抽象ルベーグ空間の上に連続型ノイズを構成する．それには，空間また時間のパラメータがつく．

確率空間を制限するのは，ノイズの関数の解析においてルベーグ積分が必要になるが，そこで可分性が求められる．たとえば，連続無限個の独立な"通常"の確率変数系を扱うことは除外される．抽象ルベーグ空間では可算性，あるいは可分性が保障される．

(2) 構成は逐次近似法で，離散変数系の列により，系の個数を逐次ふやしていく．連続無限個の系に対する近似は，実数の2進法展開をモデルとする．

(3) 独立と独立増分とを同等と考えることは前節の(*)で説明した．その連続無限への類似は，$Z(t)$を加法過程とし，$\dot{Z}(t)=\dfrac{d}{dt}Z(t)$と書けば

$$(**)\quad \dot{Z}(t)\longleftrightarrow Z(t)$$

である．構成法はこれに従う．

$Z(t)$ の第 n-近似を $Z_n(k)=\sum_{j=1}^{k}X_j^n$ とする．一様近似の要請から各 n について $\{X_j^n\}$ は i.i.d. で，各々は素な要素である．

以上の状況で，時間についてのノイズの構成には，本質的に二つの場合(i), (ii)のみが可能である．

（i） 単位時間区間 I を 2^n 個の等区間 $\Delta_k^n, 1\leq k\leq 2^n$ に分割する．各小区間に i.i.d. の要素 X_k^n を対応させる．$E(X_k^n)=0$ とするが，分散については和 $\sum_{k=1}^{2^n}V(X_k^n)$ を一定 $(=1)$ にするため，$V(X_k^n)=2^{-n}$ とする．各確率変数の標準偏差(スケールを表す)は $2^{-n/2}$ である．区間の長さで割って，スケールあたりの確率変数としては $\frac{X_k^n}{2^{-n}}$ である．$n\to\infty$ のときに長さは無限大になる．すなわち ideal なものになる．

一方，和 $\sum_{k=1}^{n}X_k^n$ はすでに規格化されていて，$n\to\infty$ のとき，その分布は標準ガウス分布に近づく．

連続する小区間の和が区間 $[a,b]$ となったとする：

$$\sum_k \Delta_k^n=[a,b].$$

そのような k について和

$$S(n\,;a,b)=\sum_k X_k^n$$

をとれば，$n\to\infty$ のとき $S(n\,;a,b)$ の分布はガウス分布 $N(0,b-a)$ に近づく．区間 $[a,b]$ と $[c,d]$ が重なり合う区間がなければ，$S(n\,;a,b)$ と $S(n\,;c,d)$ とは独立である．よって $\{X_k^n\}$ はブラウン運動 $B(t)$, $t\in[0,1]$ を近似する．また，前述の $\frac{X_k^n}{2^{-n}}$ は $B(t)$ の時間微分であるホワイトノイズ $\dot{B}(t)$ を近似する．

上の近似で各変数 X_k^n は分散有限としたことに注意したい．その値は0でなければ何程でもよい．ガウス分布はすべて同じタイプだから，この状況におけるノイズは，ただ一種類しかない．

（ii） I の分割は(i)と同じとする．ただし(i)では分散に着目したが，今回は同じく加法性をもつ平均値に注目する．さらに X_k^n は，とる値が最も単純な場合(素であることの要求から)，すなわち，二つの値のみ，たとえば1と0とし，それぞれの値をとる確率を p_n と $1-p_n$ とする．ここでは，和 $S(n)=\sum_{k=1}^{2n}X_k^n$ の平均値 np_n を n に無関係な値 $\lambda(>0)$ となることを要求する．これもスケールに対する要請である．

$n\to\infty$ のとき，$S(n)$ の分布は平均値 λ (強度)のポアソン分布に収束する(小確率の法則)．

ここでも(i)のように $S(n)$ の部分和を考えれば，その分布は，やはりポアソン分布に収束する．区間 $[a,b]$ と $[c,d]$ とに重なりあう区間がなければ，両者は独立である．よって，強度が λ のポアソン過程 $P(t)=P(t,\lambda)$ の近似が得られた．

このとき，ノイズ $\dot{P}(t)$ の近似は X_k^n 自身ではなく，微小区間 Δ_k^n をとり X_k^n を $|\Delta_k^n|$ で割った極限を考えることになる．それは $\frac{X_k^n}{2^{-n}}$ としてよく，やはり長さ無限大の ideal なベクトルに近づく．

ここで重要な主張がある．上の極限を考えるとき，強度 λ を天下り的にきめた．$\lambda\neq\lambda'$ ならば，$P(t,\lambda)$ と $P(t,\lambda')$ とは違ったタイプの分布をもつ．こうして異なるタイプのポアソン型確率過程の系

$$P=\{P(t,\lambda),\lambda\in(0,\infty)\}$$

が得られる．したがって，ノイズ $\dot{P}(t,\lambda)$ にも連続無限個の違ったタイプのものがある．

上では，(i)と(ii)の代表的なノイズを考えたが，両者の相違はどこにあるのかという問いがあろう．一つの観点から述べるとすれば，(i)では中心極限定理が働くが(ii)ではそれが成り立つ状況にはない．

参考文献

[1] 伊藤 清,『確率論の基礎』, 岩波書店, 1944.

[2] A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, 1933.

[3] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 1, Wiley, 1950.

[4] D. Mumford and A. Desolneux, *Pattern theory*, A. K. Peters, 2010.

[5] H. ワイル著, 内山龍雄訳,『空間・時間・物質』ちくま学芸文庫, 2007(原著 1923).

［ひだ たけゆき］

時空と偶然
第2回

飛田武幸
◎名古屋大学・名城大学名誉教授

ノイズの数理に向けて：Stochasticity

◎── Lévy過程

「確率論で注目すべき構造は何か」と問われたら，迷わずLévy（レヴィ）過程の分解を真っ先に挙げる．今回はそれが現れる背景と，そこからの発展を述べる．

我々がよりどころとする独立確率変数系は，連続無限個のパラメータを持つ場合が重要で，それが時間tに依存するときは，前回述べたように加法過程$Z(t)$の時間微分$\dot{Z}(t)$として与えることができた．この事実をより標準的にするため，その独立な増分$dZ(t)$はtについて同分布であるとする．可分性の要求から，$Z(t)$はtについてなんらかの連続性のあることが望ましいが，いま，tについて確率連続であるとしよう．すなわち，任意のtと$\varepsilon>0$について

$$\lim_{h\to 0} P(|Z(t+h)-Z(t)|>\varepsilon)=0$$

である．このような加法過程はLévy過程と呼ばれる．このとき，驚くべき事実が成り立つ．すなわちLévy過程は次の互いに独立な3項の和として表される：

（i） ct, cは定数．
（ii） $\sigma B(t)$, $B(t)$はブラウン運動で，σは定数．
（iii） 複合ポアソン過程$Y(t)$．

この複合ポアソン過程の意味は，少しあとに述べるが，直観的な意味は異なる強度を持った独立で理想的なポアソン過程の和として表されるということである．各成分は確率過程としては「素」なものである．

分解についてのこの重要な結果は主としてP. Lévyによるが，これにA. Ya Khinchin，伊藤清，佐藤健一の諸教授による発展が続く．

こうして，Lévy過程は，ブラウン運動も併せて，素な加法過程の和として表され，ランダムな複雑系に対するreductionのための第一歩が明確になった．

◎── 空間パラメータのノイズ

時間パラメータと同時に空間パラメータのノイズがある．Lévy過程の分解には複合ポアソン過程があり，時間微分だけでは"素な確率変数系"にはならない．さらに空間パラメータで素になるまで分解したい．

図1　P. Lévy教授夫妻，自宅(Paris 16e)マンションのロビーにて，1968年3月．

直観的には，複合ポアソン過程を"跳び"によって分解すると言うが，連続無限個の違った跳びを持つものから，それぞれの跳びによって分類し，連続無限個のポアソン型の確率過程を作ることは不可能である．

以下，この直観的な説明を正確なものにするため，空間パラメータのノイズの定義とその多様性，さらにその集め方と分解などの方法を明らかにしたい．

前回ポアソン型ノイズ$\dot{P}(t,\lambda)$の構成にあたり，天下りにきめたλを用いた．それは，小確率の法則の適用において，平均値np_nであった．X_i^nのとる値を0, 1の代わりに0, aとすれば，λは$a\lambda$になる．いずれにしても，この強度は空間的な変数であり，ポアソン分布のタイプを決める特性量である．ポアソン変数（ポアソン分布に従う確率変数）の成因を考えるときのヒントになろう．

強度に関して，また別の見方がある．ポアソン変数の分布は強度について加法的である．詳しくいえば，X_1とX_2が独立で，それぞれ強度λ_1とλ_2のポアソン変数であるとき，X_1+X_2は強度$\lambda_1+\lambda_2$のポアソン変数であることは，強度λのポアソン分布の特性関数が

$$\varphi(z) = \exp[\lambda(e^{iz}-1)]$$

であることを用いれば，すぐにわかる．

加法を考えれば，すぐ加法過程に結びつく．ポアソン過程，前回の記号で $P(t,\lambda)$ の分布は強度 λt のポアソン分布である．

これを一般化しよう．半直線 $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ 上の局所有界なボレル測度 $dn(u)$ をとる．可算個の区間の系 $\{\Delta_k\}$ をとり，ポアソン変数の系を $P(\Delta_k)$ とする．$P(\Delta_k)$ の強度が $n(\Delta_k)$ であり，Δ_j と Δ_k とが重なりあう区間がなければ独立である．また，強度の加法性から Δ_k について加法的であるようなものを構成することができる．それは有限加法的なランダム測度に拡張できるが，さらに完全加法的なランダム測度にまで拡張できる．これを $P(n(A))$ (A はボレル集合)と書く．これは，また

$$\int_A P(dn(u)) = \int \chi_A(u) P(dn(u))$$

と表すこともできる．χ_A は A の定義関数である．

特に $dn(u)$ がルベーグ測度であるときは，ランダム要素 $P(du)$ が自然に定義できて，それは強度が無限小 du のポアソン変数である．よってその特性関数は $\exp[du(e^{iz}-1)]$ となる．対応する微小な確率変数を $P'(u)$ とする．

定義　系 $\{P'(u), u>0\}$ を空間パラメータのノイズという．

次はポアソン変数の強度の変換である．実際，スケールによる変換はできない．これは Lévy 過程の分解法に影響してくる事実でもある．具体的には次のように説明される．$n(A) = \lambda$ とおき，これを強度とするポアソン変数をポアソン過程に埋め込む：すなわち，

$$P(n(A)) = P(1,\lambda)$$

となるようなポアソン過程 $P(t,\lambda)$ を構成する．t を固定したときに得られるポアソン分布の特性関数は

$$\varphi(t,z) = \exp[tn(A)(e^{iz}-1)]$$

である．ゆえにこの $tn(A)$ がその分布の強度になる．こうして強度の変化が時間のパラメータによって得られた．空間とは違い，時間はどのようにも変えることができる．この事実の認識は重要である．

⑥──ノイズの線形関数

これまで三種類のノイズを扱ってきた．

(1)　時間パラメータ $t \in \mathbb{R}$ の場合．
(1. i)　ホワイトノイズ：ブラウン運動 $B(t)$ の時間微分 $\dot{B}(t)$．
(1. ii)　ポアソンノイズ：ポアソン過程 $P(t,\lambda)$ の時間微分 $\dot{P}(t,\lambda)$．
(2)　空間パラメータ $u, u>0$ の場合：$P'(u)$．

このリストに登場するものはすべて idealized elemental random variables の系である．それぞれを変数系と考えて，その関数を定義することができる．まず，線形汎関数を導入する．

(1. i)でパラメータ t は $\mathbb{R}^1$ を動くとすると，線形関数(実は汎関数)は $\mathbb{R}^1$ 上の関数 f を用いて

$$\int f(t)\dot{B}(t)dt \tag{1}$$

と表される．これを正当化することは容易である．すなわち，$f(t)$ が定義関数 $\chi_{[a,b]}$ のとき，$\dot{B}(t)$ の定義に戻れば，上の積分は $B(b)-B(a)$ でなければならない．さらに，f が重なりあわない有限個の区間の定義関数の一次結合，すなわち階段関数のときも，同様にして上記の積分(1)が定義できる．それはガウス変数，すなわちガウス分布に従う確率変数でその分散は $\|f\|^2$ に等しいことが計算できる．ただし $\|\cdot\|$ は $L^2(\mathbb{R}^1)$-ノルムである．こうして階段関数の全体の張るベクトル空間 L_1 は $L^2(\mathbb{R}^1)$ で稠密であり，階段関数を被積分関数として式(1)で定義される積分のなす線形空間 H_1' とノルム空間として同型になる．この H_1' は平均値0のガウス型確率変数のなすベクトル空間であり，ノルムは標準偏差による．こうして同型対応

$$L_1 \cong H_1'$$

が得られる．両者の閉包をとり

$$L^2(\mathbb{R}^1) \cong H_1 \tag{2}$$

として H_1 が定義される．その要素は対応する $L^2(\mathbb{R}^1)$ の要素 f により式(1)のような積分として表される．それはガウス分布 $N(0,\|f\|^2)$ に従う．空間 H_1 は通常のガウス型確率変数の集合である．

そこで，もうひと踏ん張りして同型対応を拡張する．

それは，$L^2(\mathbb{R}^1)$ を拡張して，$\mathbb{R}^1$ 上の -1 次ソボレフ空間 $K^{-1}(\mathbb{R}^1)$ をとって

$$K^{-1}(\mathbb{R}^1) \cong H_1^{-1} \tag{3}$$

を得て，ホワイトノイズの線形超汎関数空間 H_1^{-1} が定義できた．δ-関数 δ_t は空間 $K^{-1}(\mathbb{R}^1)$ の元であり，対応する H_1^{-1} の元は $\dot{B}(t)$ となる．これまでそれは ideal なものとして理解していたが，今後は正式に定義された H_1^{-1} の元と理解される．すなわちホワイトノイズ $\dot{B}(t)$ は市民権を得たのである．ところで，その H_1^{-1} ノルムは δ_t の $K^{-1}(\mathbb{R}^1)$ ノルム，すなわち

$$\left(\int\frac{|e^{it\lambda}/\sqrt{2\pi}|^2}{1+\lambda^2}d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

に等しい．もし $\dot{B}(t)$ を無理に H_1 の要素と考えて，そのノルムをみれば，$\frac{1}{\sqrt{dt}}$ であり無限大としか言いようがない．長さ無限大のベクトルで，一次独立な要素が連続無限個ある！ それにも，いま H_1^{-1} において厳密な定義が与えられたのである．

補足　筆者が好んで引用するのは，次の朝永語録である(文献[9]第3話参照)．

> ディラックの理論では，連続的な変域を持つパラメータ q を添字とする X_q といった軸を用いることも可能なのです．(じつを言うとこのような考え方を数学者はきらうのですが，物理学者にとってはたいへん便利な考え方なのです．)

これに先立って，朝永教授が行った名古屋大学での集中講義では，これが"長さ無限大のベクトル"という表現となって出てくるのは興味深い．それから幾星霜を経て，今やこのようなベクトルがノイズ $\dot{B}(t)$ として，確率論のきわめて重要な概念となって登場しているのである．実際，線形超汎関数の空間では，それは長さが $\frac{1}{\sqrt{2}}$ のベクトルである．

スピン，いやノイズはめぐる！

(1. ii)のポアソンノイズ $\dot{P}(t)$ の場合も，$\dot{B}(t)$ のように，それ自身は普通の空間では長さが無限大になってしまい，そこでの存在が許されないが，(1. i)のときのように，$\dot{P}(t)$ の線形超汎関数の空間を構成して，そこにおいて指導的役割を演ずることになる．具体的には，$\dot{B}(t)$ も $\dot{P}(t)$ も汎関数の変数となるのである．

(2)の空間パラメータのノイズ $P'(u)$ の場合は，前者と様子が違ってくる．強度に関連して次の小節で考察しよう．

⑥──強度と時空

空間ノイズの発生源の一つは前回の連続型ノイズの(ii)でみたように，ポアソン分布を導いたとき強度 λ を空間的パラメータとみた．そのとき各 X_i^n のとる値を最少の二つに限定したが，それでも値によって強度は変えることができた．

なお，その場合に時間区間を単位区間でなく，$[0, t]$ とし，やはり X_i^n の分布は同じとして，小区間の和が $[0, t]$ に収まる最大個数までふやして和を考えた場合，極限分布は強度 $t\lambda$ のポアソン分布が生じる．時間によって強度を変える場合である．

上記の平易な事実をポアソン過程 $P(t, \lambda)$ に対する言葉で表してみよう．それは各時間タイプを変えたポアソン分布を発生している．しかし，強度さえ変えなければ同時刻で $P(t, \lambda)$ と $uP(t, \lambda)$ とは，任意の $u>0$ について同じタイプである．

そこで，次の処方を試みる．ポアソン変数は強度 λ が異なれば，その分布のタイプが異なるが，その違いをスケール $u>0$ で区別するため1対1対応

$$u \longleftrightarrow f(u)$$

を決めておく．$f(u)$ は強度 $\lambda(u)$ のつもりであるが，正の値をとる単調関数とする．$t=1$ のときを取り上げることにして，$P(1, f(u))$ を $P(f(u))$ と書く．$\{\Delta_j\}$ を $(0, \infty)$ の分割で $|\Delta_j|$ は一定とする：h で表す．そこで $u_j \in \Delta_j$ とし，独立ポアソン変数列

$$P(f(u_j)\Delta_j), \quad (j=1, 2, \cdots)$$

を取り上げる．そのような確率変数の特性関数は

$$\varphi_j(z) = \exp[f(u_j)h(e^{iz}-1)]$$

である．それらの確率変数の和をとり，$h \to 0$ とすれば，ポアソン過程への埋め込みの具現化で

$$\varphi(z) = \exp\left[\int f(u)du(e^{izu}-1)\right] \tag{4}$$

が得られる．$[\cdot]$ の積分可能性を仮定すれば，(4)は特

性関数である．それが定める分布は，$f(u)$ の性質から強度の異なる，すなわち，すべて違ったタイプのポアソン型分布の重畳であることがわかる．

例　$0<\alpha<1$ として

$$f(u)=\frac{1}{u^{\alpha+1}},\qquad (u>0)$$

なら $\varphi(z)$ は正の値をとる指数 α の安定分布の特性関数になる．これはまた，同じ指数の安定過程の一時点における分布とみることができる．

上の例に示唆されて簡単な注意を述べる．任意のポアソン変数は，一つのポアソン過程 $P(t,\lambda)$ の中に，時間変数 t を適当にえらび，λ との積を決めることによって埋め込むことができる．そのとき，強度の指定は時間の選択に帰着できる．

以上，時・空のパラメータがノイズの場で自由に，また相互に関連しあって動くのを見た．見通しのよい表現は次回以降に示す．

◎──無限分解可能な法則

ここでいう法則とは確率分布のことである．1次元分布 Φ に限定して考える．それが無限分解可能とは，任意の自然数 $n\,(>1)$ に対して分布 Φ_n が存在して

$$\Phi=\Phi_n^{*n}$$

と表されるときをいう．ただし右辺の $*n$ は n 回の重畳をあらわす．

無限分解可能な分布の特性関数 $\varphi(z)$ は

$$\log\varphi(z)=imz-\frac{1}{2}\sigma^2z^2+\int\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)dn(u)\qquad(5)$$

と表される．ただし m は定数，$dn(u)$ は $\mathbb{R}^2-\{0\}$ 上の測度（Lévy 測度）で次式をみたす．

$$\int\frac{u^2}{1+u^2}dn(u)<\infty$$

これを見ると，imz は"ずれ"に，第2項はガウス分布に対応することはすぐにわかる．加法過程に対応すればブラウン運動（分散 σ^2）となる．積分の項を見ると，$u>0$ なら $dn(u)$ は強度の密度関数，$e^{izu}-1$ と合

図2　佐藤健一教授

わせてポアソン型の分布（埋め込みでポアソン過程）に対応する．(4)式の一般化とみてよかろう．$\frac{izu}{1+u^2}$ は補正項で，独立変数の和の収束を，補正項を置いて広義の収束を定義するのと同じアイディアである．

$u<0$ は以上と対称的に考えればよい．

無限分解可能な法則は，Lévy 過程の分布に対応することは見やすい．したがって，Lévy 過程の分解（Lévy 分解，Lévy-Itô 分解）が示唆される．その厳密，かつ一般的な壮大な理論は佐藤健一教授により，文献[10]，[11]にまとめられている．賛辞を添えて紹介したい．また，「無限分解可能過程に関連する諸問題」研究会が継続的に統計数理研究所で開催され（代表・志村隆彰博士），この方向の研究を活性化している．

参考文献

[6] P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, 1937. 2éme ed. 1954.

[7] P. Lévy, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars, 1948. 2éme ed. 1965.

[8] P. Lévy,『一確率論研究者の回想』，岩波書店，1973.

[9] 朝永振一郎,『スピンはめぐる』，中央公論社，1974.

[10] 佐藤健一,『加法過程』，紀伊国屋書店，1990.

[11] K. Sato, *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge University Press, 1999.

［ひだ たけゆき］

飛田武幸
◉名古屋大学・名城大学名誉教授

時空と偶然 第3回

すべての道はノイズに通ず

ここでいう道とは，種々の偶然現象の解明への，それぞれの道である．

当初の方針のように，偶然現象を表す確率変数の系がノイズから構成されているとしたとき，それを表す関数を可能な限り一般の形で調べておきたい．

まず，単一なノイズの関数の場合を考える．ホワイトノイズ $\dot{B}(t)$ の場合から始めよう．

◉――ホワイトノイズ汎関数 I：ガウス系

ホワイトノイズ $\dot{B}(t), t \in \mathbb{R}^1$ をとり，前回定義した線形汎関数の全体 H_1 をみると，その要素の一次結合をとる演算で閉じている，すなわち線形空間である．その演算はガウス変数の性質も保存する．これは当たり前のことではない．ポアソン変数系ならこんなことは成立しない．我々が当面するのはガウス系である．以下，時間 t をパラメータとするガウス過程を扱う．

ここで自明な同等対応に注意する：$t \geqq 0$ として

$$B(t) \longleftrightarrow \dot{B}(t)$$

これは時間の順序をも保つ．このような理解の上で，どちらも基本的な変数系であるとして平等に扱う．

一般のガウス過程を与えられた偶然現象を表す確率変数系と見れば，当初の帰納化の問題，すなわち，$X(t)$ から独立変数系を取り出す問題がおこる．それは単純な話ではない．例をあげよう．

例1　ホワイトノイズで表現される次の二つのガウス過程は同じ過程である．$\dot{B}_i(u), i=1,2$ は，ともにホワイトノイズとする．

$$X_1(t) = \int_0^t (2t-u)\dot{B}_1(u)du,$$

$$X_2(t) = \int_0^t (3t-4u)\dot{B}_2(u)du.$$

実際，二つのガウス過程は平均値0，共分散関数

$$\Gamma(t,s) = 3ts^2 - \frac{2}{3}s^3 \qquad (t \geqq s)$$

をもつ．すなわち両者は同じガウス過程を表す．

このように，同じガウス過程に二つの一見違った表現があることを，不思議に思われるかもしれない．実は，そういう疑問こそ歓迎したいところである．この例は P. Lévy によるが，彼はこの背後にひそむ原理の有意義なことを直接明示することはしなかった．事情を忖度して，種明かしをしよう．

$X_1(t)$ を $[0,t]$ で積分する：

$$Y(t) = \int_0^t X_1(s)ds = \int_0^t (t^2-tu)\dot{B}_1(u)du.$$

$\frac{1}{t}Y(t)$ を t で微分すれば答は $B_1(t)$ であることはすぐにわかる．これから結論できることは，任意の t について $X(s), s \leqq t$ から $\dot{B}(s), s \leqq t$ が構成できるということである．後者は前者の関数になる．逆の関係は始めから明らかなことである．こうして，帰納化の目標が達成される．$\dot{X}_1(t)$ のような好都合な表現は標準表現と呼ばれる．

一方で，$X_2(t)$ はこのような性質は持たない．それを試すことは容易であるので省略するが，一つだけ注意しよう．$X_2(t)$ を構成する $B_2(t)$ の関数 $\int_0^t u^2\dot{B}_2(u)du$ は $X_2(t)$ と独立である．

この例をヒントにして，一般のガウス過程の議論に進みたい．本質的でないところは簡単にするため，ガウス過程 $X(t), t \geqq 0$ は

$$E(X(t)) = 0 \qquad (t \geqq 0)$$

とする．$X(t) \in L^2 = L^2(\Omega, P)$ に注意して，L^2 内で $\{X(s), s \leqq t\}$ の張る部分空間を $M_t(X)$ と表すとき

$$\bigcap_t M_t(X) = 0,$$

すなわち，$X(t)$ は純非決定的と仮定する．これらの仮定のもとで，$M(X) = \bigvee_t M_t(X)$ から $M_t(X)$ への射影を $E(t)$ とするとき，系 $E(t), t \geqq 0$ は単位 I の分解となる．さらに仮定

$E(t)$ は t について連続である，

を置く．そのとき，以下の定理がある．

定理1　空間 L^2 を動く有限または加算無限個の加法過程 $Z_k(t)$ $(E(Z_k(t)) = 0)$ があって，次の(i)～(iv)が成り立つ．

（i） 系 $\{Z_k(t)\}$ は $M_t(X)$ を張る．

（ii） $t > s$ のとき $E(s)Z_k(t) = Z_k(s)$．

（iii） 測度 $d\rho_k(t) = E(|Z_k(t)|^2)$ について

$$d\rho_1 >> d\rho_2 >> \cdots$$

である．

（iv） $X(t)$ は Volterra 核 $F_k(t, u)$ により

$$X(t) = \sum_k \int_0^t F_k(t, u) dZ_k(u) \qquad (1)$$

と表される．ただし $F_k(t, \cdot) \in L^2(d\rho_k)$．

0でない測度 $d\rho_k$ の個数が $X(t)$ の重複度である．重複度が1の場合，(1)を $X(t)$ の標準表現という．そのとき，時刻 s までの $X(u), u \leqq s$ が知られたときの $X(t), t > s$ の条件付き平均値は

$$\int_0^s F(t, u) dZ_1(u)$$

で与えられる．標準表現は存在すれば一意である．興味があるのは dZ_1 が時間的に一様な場合，すなわち定数を除き $\dot{B}(t)$ の場合である．そのとき，当初の目標であった帰納化，関数表示の問題が解決する．

◎──ホワイトノイズ汎関数Ⅱ：空間 $(L^2)^-$

次は多項式や指数関数のような非線形関数の扱いになる．はじめに，一番簡単な単項式を取り上げる．変数 $\dot{B}(t)$ は H_1^{-1} の要素として確定している．そのベキを見よう．例えば，整数 $p > 1$ のとき $\dot{B}(t)^p$ である．その見本関数は t の超関数 $\dot{B}(t)$ のベキであり，通常の解析学では扱えない．このベキの繰り込みを提唱しよう．

註 この提唱には多くの背景的事実がある．前回の朝永語録にもどり，長さ無限大のベクトルを扱っていることを思い出そう．しかし，物理学的な方法を借用できる状況ではない．また将来の解析の展開を見通した，しかも合理的な方法で実のある結果を得なければならない．一方，離散パラメータの場合なら，ガウス変数 X のベキ X^p をあつかうのに何の困難もない．ランダムな関数の解析では "離散パラメータの場合の類似が許されない" という重要なコメントがつく．新しい解析も考えていかねばならない．[12]参照．

種々の理由や試行の経過などは省略して，結果のみを述べる．手法はパラメータ付きエルミート多項式 $H_n(x\,;\sigma^2)$ の利用である：

$$H_n(x\,;\sigma^2) = \frac{(-\sigma^2)^n}{n!} e^{x^2/(2\sigma^2)} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/(2\sigma^2)}.$$

$(\sigma > 0,\ n \geqq 0)$

ベキ $\dot{B}(t)^p$ の繰り込みの結果を $:\dot{B}(t)^p:$ と書き，

$$:\dot{B}(t)^p: = p! H_p\left(\dot{B}(t)\,;\left(\frac{1}{dt}\right)\right)$$

とする．上式の右辺は $\dot{B}(t)^p$ から dt の負のベキで表される項(それは無限大と解釈する)をすべて除いたものと解釈しよう．これが多項式の繰り込みである．異なる $t_j, j = 1, 2, \cdots, t_n$ のときの積 $\prod_j \dot{B}(t_j)^{p_j}$ に対しては

$$\prod_j :\dot{B}(t_j)^{p_j}: \qquad (2)$$

を繰り込みとする．繰り込まれた積で，$n = \sum_{j=1}^m p_j$ をその次数という．この演算をホワイトノイズの多項式全体に線形的に拡張する．これは多項式の表現に無関係に定義される．これを用いて積分

$$\varphi(\dot{B}) = \int \cdots \int F(u_1, u_2, \cdots, u_m) \prod_j :\dot{B}(u_j)^{p_j}: du^m$$

が定義できる．ここで F はソボレフ空間 $K^{-(n+1)/2}(\mathbb{R}^n)$ の要素である．関数 F の変数 u_j は p_j 個の変数が退化していると理解する．このように表される $\varphi(\dot{B})$ の全体を $H_n^{(-n)}$ とし，ホワイトノイズの n 次超汎関数空間という．位相は，上の積分できまる対応

$$\varphi \longleftrightarrow \hat{F}$$

($\hat{F}$ は F の対称化である)が同相になるように導入する．等距離的にするには定数 $\sqrt{n!}$ を F のソボレフノルムに掛ければよい．記号を揃え $H_1^{-1} = H_1^{(-1)}$．

定義 一般のホワイトノイズ超汎関数空間 $(L^2)^-$ は，適当な正の非増加数列 $\{c_n\}$ をとって，直和

$$(L^2)^- = \bigoplus_{n=0}^{\infty} c_n H_n^{(-n)} \qquad (3)$$

で与えられる．テスト汎関数空間を $(L^2)^+$ とする．

この超汎関数空間の位置づけをしてみよう．ホワイトノイズの確率分布は，超関数空間，例えば Schwartz

超関数空間 $\mathcal{S}'$ 上の確率測度 μ である．通常の方法で複素ヒルベルト空間 $(L^2)=L^2(\mathcal{S}',\mu)$ が定義される．それは，テスト関数空間 $\mathcal{S}$ の元 ξ により双一次形式 $\dot{B}(\xi)=\langle\dot{B},\xi\rangle$ を得て(それは通常のガウス変数)，それらの関数 $\varphi(\dot{B}(\xi)\,;\xi\in\mathcal{S})$ で，分散が有限なものからなるヒルベルト空間である．そのとき三つ組

$$(L^2)^+\subset(L^2)\subset(L^2)^- \qquad (4)$$

が得られる．こうしてみると，$(L^2)^-$ はかなり広い空間のようであるが，その構成は，多項式から出発する基本的な解析学の流れに沿っているし，応用も考慮したもので適切な大きさである．

かなり一般の偶然現象でガウス型のノイズ，すなわち $\dot{B}(t)$ を偶然の源とする場合は，この超汎関数空間で表される．そして，微積分の演算を受け入れる態勢が整うのである．

ここに至る背景，その動機などは，参考文献[12]，[13]参照．なお，詳細は[14]で述べた．

◎── ホワイトノイズ汎関数 III：空間 $(\mathcal{S})^*$

ホワイトノイズの超汎関数を定義するもう一つのアプローチを紹介する．それは久保-竹中理論である．内容は参考文献[15]に詳しい．直観的に言えば，それは Schwartz 超関数論の無限次元版であり，ランダムな場合への一般化で，スマートな方法である．

空間 (L^2) を出発点にすることは前と同じであるが，$L^2(\mathbb{R}^1)$ 上の作用素

$$A=-\frac{d^2}{du^2}+u^2+1$$

をよりどころとする．物理の言葉でいえば，第二量子化の方法によって，空間の三つ組みを構成する：

$$(\mathcal{S})\subset(L^2)\subset(\mathcal{S})^*. \qquad (5)$$

空間 $(\mathcal{S})^*$ を，やはりホワイトノイズ超汎関数空間という．$(\mathcal{S})$ がテスト汎関数の空間である．特に指数関数 $\exp[\alpha\langle\dot{B},\xi\rangle],\alpha\in\mathbb{C}$ はテスト汎関数である．それは $(L^2)^+$ の元でもある．

空間 $(\mathcal{S})^*$ は $(L^2)^-$ と類似の役割を果たすが，利点はその元の特徴づけが存在することである．

◎── S-変換

超汎関数 $\varphi(\dot{B})$ に対して

$$(S\varphi)(\xi)=C(\xi)E(e^{\langle\dot{B},\xi\rangle}\varphi(\dot{B})), \qquad (\xi\in\mathcal{S})$$

によって S-変換 $(S\varphi)(\xi)$ を定義する．$C(\xi)$ は μ の特性汎関数である：$C(\xi)=\exp\left[-\frac{\|\xi\|^2}{2}\right]$．指数関数がテスト関数であるので，この変換はいつでも定義できる．特にヒルベルト空間 (L^2) の S-変換による値域 $\mathbf{F}$ は，$C(\xi-\eta)$ を再生核とする**再生核ヒルベルト空間**とすることにより，S-変換が同型対応になる．$\mathbf{F}$ の元は滑らかな関数 ξ の汎関数であり，$\mathbf{F}$ の位相が好都合なこと，また

$$S:\dot{B}(t)\longrightarrow\xi(t) \qquad (6)$$

であるので，時間を考慮した対応も見やすいこと等から，ホワイトノイズ解析の重要な道具となっている．

定理 2(Potthoff-Streit)　$\varphi(\dot{B})$ の S-変換 $U(\xi)$ が定義されるとき，それが $(\mathcal{S})^*$ の元であるための条件は，

(i)　任意の ξ,η に対して，$U(\eta+\lambda\xi),\lambda\in\mathbb{R}^1$ は $z\in\mathbb{C}$ の整関数に拡張される．

(ii)　自然数 p と正数 c_1,c_2 が存在して，任意の $z\in\mathbb{C}$，$\xi\in\mathcal{S}$ に対して

$$|U(z\xi)|\leqq c_1\exp[c_2|z|^2\|\xi\|_p^2]. \qquad (7)$$

が成り立つことである．ただし $\|\xi\|_p$ は Schwarz 空間 $\mathcal{S}$ の位相をきめる p 番目のノルムである．

◎── 回転群

ホワイトノイズの確率分布 μ は ∞ 次元空間の半径 $\sqrt{\infty}$ の球面上の一様な確率測度と見られる．これにはいくつかの説明法が知られている．そこで自然に(無限次元)回転群が定義され，μ は回転不変な測度の一つとして特徴づけられる．

註　無限次元回転群の原型は，核型空間 E を基礎にとり，吉沢尚明教授によって与えられた(1970)：$O(E)$．

我々は，ホワイトノイズのパラメータ t が連続である特徴を強調し，群 $Diff(S^1)$ との関連も視野に入れて，特別な核型空間 E をとり，パラメータ t の変換から導かれる 1-パラメータ部分群(それを"ひげ"と呼んだ)をいくつか取り上げて，その確率論的性質を示し

た(図1参照). そのような"ひげ"をよりたくさん得たいと欲張って, 群の要請を緩めて半群にまで広げ, それらにより豊富な確率論的な性質を記述することができた. それらを通じ, 幾何学との関連もみられるようになった. 半群のニックネームは"半ひげ"である.

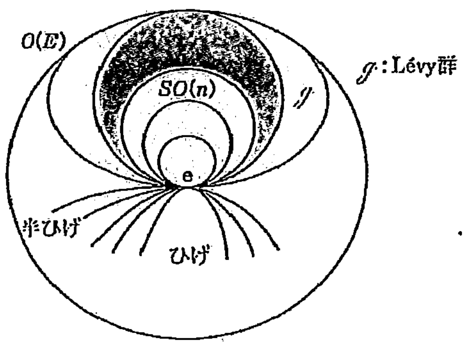

図1 無限次元回転群

ここに示す図は, 有限次元回転群との対比ともあわせて, (筆者の拙文より)よく事情を物語っている.

◎──微分と積分

次は微分を決める. 変数 $\dot{B}(t)$ による微分作用素を定義するために, 対応(6)を思い出そう. $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial \dot{B}(t)}$ に対応するのは, 空間Fにおける Fréchet 微分 $\dfrac{\partial}{\partial \xi(t)}$ でなければならない! すなわち $\varphi(\dot{B})$ に対し

$$S(\partial_t \varphi)(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi(t)}(S\varphi)(\xi)$$

である. これが微分演算の役割を果たす. $n \geq 1$ なら

$$\partial_t : \dot{B}(s)^n : = n : \dot{B}(s)^{n-1} : \delta(s-t)$$

に注意すれば, これが消滅作用素と言うにふさわしいことがわかる. また, これはテスト汎関数空間をふくむ十分大きな定義域をもつことも知られている. その共役作用素を ∂_t^* と書き, 生成作用素と呼んでいるが, これは積分作用素の働きもする. 期待どおり, Lee 積 $[\cdot,\cdot]$ による交換関係も示される:

$$[\partial_t, \partial_s] = [\partial_t^*, \partial_s^*] = 0, \qquad [\partial_t, \partial_s^*] = \delta(t-s)I.$$

ここで, I は恒等作用素である.

こうして作用素の系 $\{\partial_t, \partial_s^*, t, s \in \mathbb{R}^1\}$ から生成される興味深い非可換代数が登場する.

◎──ZiF のこと

以上は, いわゆるホワイトノイズ解析の大まかなアイディアである. 1975年に提唱したときは([13]), きわめて荒削りのものであった. それにもかかわらず, これを取り上げて理論の発展と数理物理学への展開を進めてくださったのは, ドイツの Bielefeld 大学の L. Streit 教授をリーダーとする数理物理学のグループ(国際的な研究グループ)であった. 1975年に始まった同大学の ZiF(境界領域研究所)のプロジェクトの成果である.

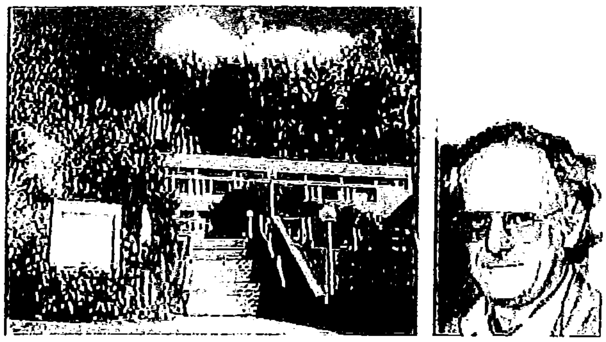

図2 ZiF と当時の Streit 教授

メンバーは絶えず若返り, 日本からの参加者も少なくない(私も含めて). テーマも多岐にわたり, 流動的であった. たとえば, ユークリッド場, $P(\phi)$ 理論, 径路積分など, ZiF で発展した話題も多く, その成果は目を見張るものがある. そこでは, いつもホワイトノイズ理論がお役に立っていることは嬉しい限りである.

参考文献

[12] Si Si, *Introduction to Hida distributions*, World Sci. Pub. Co., 2011.

[13] T. Hida, *Analysis of Brownian functionals*, Carleton Math. Lec. Notes 13, Carleton Univ., 1975.

[14] T. Hida and Si Si, *Lectures on white noise functionals*, World Sci. Pub. Co., 2008.

[15] I. Kubo and S. Takenaka, *Calculus on Gaussian white noise*, I-IV, Proc. Japan Academy, 56 (1980) 376-380, 411-416; 57 (1981) 433-437; 58 (1982) 186-189.

[ひだ たけゆき]

飛田武幸
◎名古屋大学・名城大学名誉教授

時空と偶然 第4回

確率論と解析学

◎──マルコフ過程

時代は少し溯るが，確率論が極限定理研究の時代を超えて(それは，いつまでも時代とともに装いを変えて進んでいるが)，活発なマルコフ過程研究の時代を迎えたのは前世紀の後半であった．文献[16]の与えた影響も大きかった．特に我が国では，伊藤清教授を中心として若手研究者達がこの方面の研究へと気運を盛り上げ，成果を上げていたことは特筆されよう．確率とは「ルベーグ測度である」という時代(本稿第1回参照)からの大きな前進であった．

マルコフ過程の推移確率密度関数の満たす偏微分方程式の各項が表す確率論的な意義も明らかになり，確率論と解析学の連携が一層強固なものとなった．次式のように表される伊藤清教授による確率微分方程式

$$dX(t) = a(X(t),t)dt+\sigma(X(t),t)dB(t)$$

がある．これに初期条件がつく．これを積分(dt や $dB(t)$ による積分がある)の形で理解したい．関数 a,σ に条件を課して，解の存在や一意性を示すことができる．解はマルコフ過程である．

確率微分方程式の理論は，マルコフ過程の研究に強力な手段を与え，また工学，経済学など数学以外の多くの分野に応用された．

なお，この研究には，1-パラメータ半群に関する吉田-Hille 理論の重要な貢献があった．こうして，確率解析の初期黄金時代を迎えた．

一方では，1976年の京都シンポジュウムで提唱された，いわゆる Malliavin 解析の役割にも注目したい．このあたりの詳しい内容は，池田信行教授による説明がある(文献[17]参照)ので，ここでは説明は省略する．なお，この解析については，伊藤清教授の以下のような解説がある(ラプラス，『確率論』(共立出版，1986)の巻末)：

> P. Malliavin は確率変分という概念を導入して a,σ が滑らかであるという仮定の下で，上記方程式の解 $X(t)$ が $(B(s), s \leqq t)$ の汎関数として滑らかであることを示し，その結果として，Kolmogorov の方程式の解も滑らかであることを導いた．

この線上で，これまで多くの研究が行われてきた．

ここで注意したいのは，解の $\{B(s), s \leqq t\}$ の汎関数としての認識である．それは当然ホワイトノイズ $\{\dot{B}(s), s \leqq t\}$ の汎関数でもあり，帰納化からの展開でもある．

上で偏微分方程式と言ったが，ブラウン運動の例なら第1回に述べたように $\frac{d}{dt}-\Delta$ による．これをいくらか一般化して Feller の式 $\frac{d}{dt}-\frac{d^2}{dmds}$ にいたる．dm, ds はそれぞれスピード(時間に関係する)と，空間変数についての微分を定めている(時空の関与)．

また N 重マルコフガウス過程での標準核は時間の関数 $f_i(t)$ と，空間の関数とみることができる $g_i(u)$ の，それぞれ N 個から構成されることにも眼を向けたい．それは時空の双対性を考えるときの視点となる．

◎──2000年に向けた確率論国際学会

"2000年にむけた新生確率論を" という気運がみなぎっていたのは，1990年代の後半といってよかろう．少し時間を先取りして，1998年にアメリカのコロンビア大学で "Probability towards 2000" と称する国際学会が開催された．この際，私はホワイトノイズ解析の向かうべき将来の方向に関して聊か愚見を述べた．

大変エキサイティングな会となったのは，いろいろな意味で時機を得たことにあろう．私は幸運にも，ローマ大学の L. Accardi 教授と，インド統計研究所の K. R. Parthasarathy 教授と親しく懇談することができた．

連続自由度(今は厳密なことは問わず)を持つホワイトノイズ解析と，非可換な演算をもつ量子確率論との融和に関心があった．Accardi 教授は1984年以来の親しい友人であって，量子確率論のリーダーである．今回は特に議題を絞って意見の交換ができた．ホワイトノイズは Bose 場の交換関係の表現に使われたり，無限次元回転群を用いた調和解析により，非可換な作

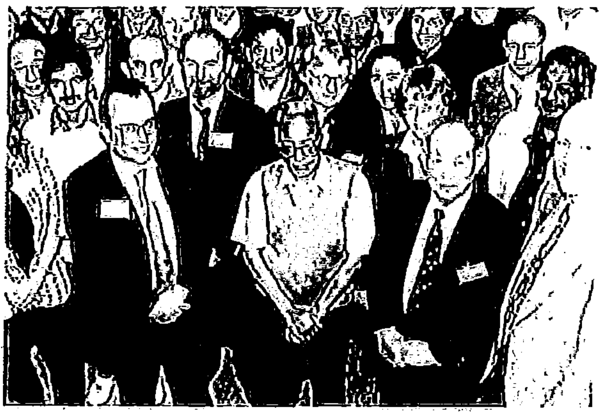

図1 Probability towards 2000 参加者．前列中央の3人，向かって左から Accardi, Parthasarathy, 飛田．

用素には親近感があり，量子確率論との融和は容易かと思ったが，実は研究課題を抱え込むばかりであった．

ほかの多くの参加者との深い接触は時間が許さなかったが，皆さん，それぞれの成果に満足されたと推察する．これと期を一にして，1998年に国際研究発表の雑誌"*Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*"が創刊されたのも偶然ではない．

◎──久保(泉)理論

ガウス分布とエルミート多項式，それが満たす2階の微分方程式との関係等は，確率論と解析学を結ぶ基本的な深い性質として一般化されるだろう，という気持ちが古くからあって，ごく初等的なところで調べたリストが今も残っている．

こんな憧れとは別に，遥かに高度な一般的理論として，直交多項式にまつわる大掛かりな理論を大成したのは久保泉教授であり，その協力者達の貢献も大きい．久保理論に関する参考文献は多いが，代表として[18]をあげよう．不十分を承知の上で，筆者なりにこの報告について理解するところを簡単に述べる．

$\mathbb{R}^1$上の確率測度μを考える．その台$\mathrm{supp}(\mu)$は無限集合で，任意の自然数$n \geqq 0$に対して

$$\int_{\mathbb{R}^1}|x|^n d\mu(x) < \infty$$

であるとする．$P_n(x)$は多項式で最上位次の係数は1とし，次の関係式をみたすとする：$n \neq m$ならば，

$$\int_{\mathbb{R}^1}P_n(x)P_m(x)d\mu(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{x^n} = 1.$$

このとき，次の再帰式が成り立つ：

$$P_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)P_n(x)-\omega_n P_{n-1}(x).$$

(α_n, ω_n)はJacobi-Szegöパラメータである．

これを踏まえて，直交多項式の母関数を見出す一般的な方法が得られた．

解析的な$\rho(t), h(x)$を適当に選び，$h(x)$に対して$\rho(t)$を用いてMRM適用可能な測度μという概念を導入した．

MRM適用可能な測度の例として，$h(x) = e^x$ならガウス分布，ポアソン分布，ガンマ分布，負の二項分布，マイックスナー分布などがあり，また，$[-1,1]$上の測度で$h(x) = (1-x)^{-\kappa}$ならベータ分布で，その密度関数は，$p, q > 0$として，$[-1,1]$で

$$f_{p,q}(x) = c_{p,q}(1+x)^{p-1}(1-x)^{q-1}$$

である．ただし，

$$c_{p,q} = \frac{\Gamma(p+q)}{2^{p+q-1}\Gamma(p)\Gamma(q)}, \quad p = q = \kappa+\frac{1}{2}.$$

その他，種々の$h(x)$に対する完備したリストも提示されている．また一般論も述べられている．そこで，潜在過程(underlying process)につながるものも考えたいものである．

こうして，離散パラメータの場合の妥当なノイズがわかり，確率解析の基礎が充実したといえる．

これは，確率解析において直交多項式が果たす役割と特徴づけを中心として展開される大がかりな一般的理論である．なぜ，本稿の話の系統の中で論ずるのかという疑問があろう．この理論は，パラメータは離散的であるが，実は思想的には同じ流れである．我々は，何よりも独立な確率変数系が対象であったが，それを少し弱めて，「無相関」すなわち，ある確率測度に関して「直交する」という概念にしてみよう．また，多項式もその次数を低い順に追えば，素なものを取り上げていく過程とみなせる．我々が一貫して idealized elemental random variables を対象としてきたことに通じるものがある．

理論は，これだけのアイディアではなく，解析学の立場，直交多項式の解釈と位置づけなど，さらには数

学一般の論理に基づくもので，高く評価されよう．

◎——ノイズ，これから

ここで，将来の発展方向，未完の理論，未開の応用などを，時空のノイズを基本にする立場から述べてみたい．

(1) 新しいノイズ

空間変数をパラメータにする新しいノイズを採用する必然性と，その位置づけは第2回に述べた．量子力学との類似について補足するなら A. Einstein([19])を挙げたい．空間というとき，空間の座標というよりは length という理解がある．推移した長さと思ってもよかろう．当然，数値0は除かれる．空間が多次元なら，確率場を考えれば，当然，基本群のお世話にもなる(K. S. Lee-Si Si)，等々．

お詫びと訂正　本稿第2回で空間パラメータのノイズを表すのに記号 $P'(u)$ を用いたが，この記号は既に別な意味で[12]8.2節において用いられている．筆者の不注意をお詫びし，本稿では $P_i'(u)$ と表すことにする．i は強度(intensity)の i である．

$\{P_i'(u), u \neq 0\}$ を変数とする汎関数およびその超汎関数に関する理論は未開発なところが多い．ポアソン型の確率過程については，その値(ジャンプの幅)よりは強度が重要であることに注意して，$P_i'(u)$ の汎関数の解析を期待したい．それは $\dot{B}(t)$ の場合の $(L^2)^-$ のように，理にかなって，適当な大きさの(大き過ぎない!)汎関数空間の上においてである．

(2) 連続無限

連続無限個の元からなる基底が重要で，深い内容を持つことを繰り返し強調したい．ノイズが時間・空間のパラメータをもつからである．離散パラメータのノイズによる連続な場合の近似ということも簡単なことではないが，より重要なことは，連続パラメータの場合の非可換理論への自然な展開と融合である．

また，パラメータは時間でも空間でも多次元で連続にしてみることで，より深い内容が見えてくる．時間について，ガウス型のノイズなら共形変換は自然に，Virasoro 代数にも視線がいく(第3回，図1の半ひげ参照)．当然のことながらホワイトノイズ解析では，大いに群が関与するが，リー環は簡にして要を得て，視覚に訴える．

今や確率解析は温故知新を乗り越えて，古い知識の再認識に留まらず，そこで提起される問題意識を新たにしながら，連続パラメータを重視して，今後の方向を見出すことである．

また，物理に学べというわけではないが，我々の解析が，物理における量子の世界で，さらに場の理論で，という描像に期せずして向かっているのは不思議でもあるが，またそれは当然でもあろう．

このように，断言的なことを言うのは，聊か躊躇するが，古典やパイオニアの教えるところを自分流に翻訳したにすぎない．座右ではなく机上の二書を掲げる．

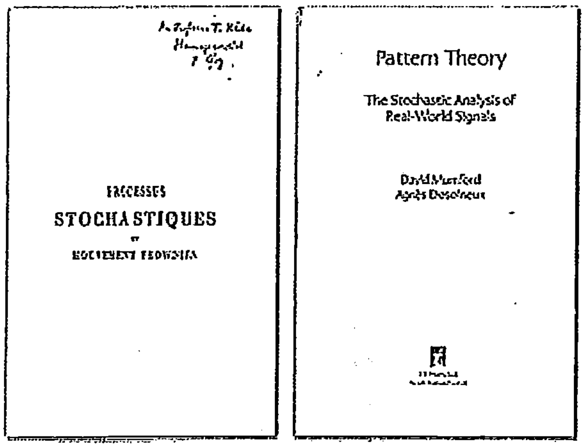

図2　P. Lévy と D. Mumford の著書

(3) 見本関数を扱う

歴史的には前世紀の半ば頃のことになるが，時系列の予測の問題で，線形予測から非線形予測への動きがあって，N. Wiener の著書[21]，[22]などが話題になり，一つの方向として確率過程の見本関数の解析を扱う研究が促進された．

一方で，P. Lévy[7](図2左)では，特に第6章の記述からブラウン運動の見本関数から複合ポアソン過程，それを分解してポアソン過程が出てくる．またブラウ

ン運動の見本関数の零点から構成される区間の集合に注目するなど，興味深い研究も人々の関心を集めた．確率過程の研究を，見本関数の集合の上の確率測度とみる観点は，その研究の新たな手法となった．

応用としては，量子力学における Feynman(経路)積分，また乱流理論における Hopf 方程式などがある．その方面からも見本関数を基にした解析の研究が促進されている．また一方，上記 Lévy の具体的な事実は，双対性に関する課題を示唆しているように思われる．双対性については，京都大学数理解析研究所の小嶋泉先生とその研究グループの方々との懇談で触発されたところも多い．ここに謝辞を付して報告する．これは，双対性の立場から確率解析を考えるヒントとなった．

◎── 『数学セミナー』と50年

1962年4月『数学セミナー』創刊の頃の，編集者の言葉に次のようなものがある．「理学者，工学者，技術者に対しては数学に対する広い見通しを与え，一般の人々に対しては有益な知識を提供する」(1962年5月号，矢野健太郎教授)：伝統的な数学はもちろん，新しい数学へ．数学のイメージを豊かにするという方針に私は賛同した．翌年の1963年には，京都大学に数理解析研究所が創立され，数学の新しい装いと方向とが大いに歓迎された．

今思えば，私はこの流れに後押しされたというのが実感である．ガウス過程の研究から，次のステップとして，確率変数の非線形解析への興味を持ち始めていた時期にあたる．例えば，池田信行教授との共同研究の結果がある．それは，1965年の確率・統計に関するバークレー・シンポジュウムで報告した[20]．非線形，無限次元の解析の一つの方向を，確率論の立場から提案した．この講演の最後に漏らした帰納化の考え(将来の夢として，トーンも低く話した)が，Feller 教授の知遇を得る契機となり，プリンストン行きになった．その史実は本稿の第1回に述べた．当時，私のクラスにいた大学院の人達が趣旨を理解してくれ，また支持してくれて，その後も交流が続いた．

今，ノイズを基礎にしながら，またこの方向を強調したい．具体的には，前節の問題提起のように，大局的な立場から確率論の種々の課題に取り組みたいと考える．

課題については，温故知新というが，自戒していることがある．その温故，すぐれた先人の足跡を訪ねてである．諺を借りていえば「鐘も撞木のあたりがら」ということで，パイオニア達の論文や著作から，知識を得ようとするのではなく，あたって(失礼!)その思想に触れたい．そうすれば，ハタと膝を打つものがあるに違いない．その思想の発展は，これからの研究に大きな影響を与えるに違いない．

ドラムは敲いてその形を聞く(知る)が(M. Kac, Amer. Math. Monthly, vol. 73, 1966)，碩学の業績は鐘のように，撞木の敲き具合で，それなりに応えてくれる．

筆者の乏しい経験から言えば，同様な感想を持った文献として，図2の2冊のほかに H. Weyl[5](第1回文献)，A. Einstein[19]を挙げたい．

『数学セミナー』の次の節目の年には，どのような回顧と展望が登場するであろうか？　(終)

参考文献

[16] A. N. Kolmogorov, "*Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*", Math. Ann. 104 (1931), 415-458.

[17] 池田信行,「確率解析の生い立ちと成長」,『数学』49巻3号(日本数学会50周年企画)(1997), 272-291.

[18] 久保泉(with Nobuhiro Asai, H.-H. Kuo & Suat Namli),「Multiplicative renormalization method 適用可能な測度の決定」,『日本数学会年会統計数学分科会予稿集』, 2009.

[19] A. Einstein, *The meaning of relativity: Including the relativistic theory of the non-symmetric field*, Princeton University Press, 1921, 1956.

[20] T. Hida and N. Ikeda, "*Analysis on Hilbert space with reproducing kernel arising from multiple Wiener integral*", Proc. 5th Berkeley Symp. on Math. Stat. Probability 2 (1967), 117-143.

[21] N. Wiener, *Extraporation, interporation and smoothing of stationary time series*, M.I.T. Press, 1949.

[22] N. Wiener, *Nonlinear problems in random theory*, M.I.T. Press, 1958.

[ひだ たけゆき]